

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Societatea de Științe Matematice din România



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, **12 Martie 2011**

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a VIII-a

Problema 1. Fie a și b două numere reale strict pozitive diferite, cu proprietatea că numerele $a - \sqrt{ab}$ și $b - \sqrt{ab}$ sunt raționale. Arătați că numerele a și b sunt raționale.

Soluție. Deoarece raportul a două numere raționale este număr rațional și $\frac{a - \sqrt{ab}}{b - \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b} - \sqrt{a})} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, rezultă că există $q \in \mathbb{Q}$ astfel încât $\sqrt{a} = q\sqrt{b}$.

..... **3p**
Atunci $b - \sqrt{ab} = b(1 - q)$ este număr rațional, de unde, ținând cont că $q \neq 1$ (altfel am avea $a = b$), rezultă că b este număr rațional.

..... **2p**
Întrucât $a = q^2b$, rezultă că și a este număr rațional.

..... **2p**
Problema 2. Piramida $VABCD$ are ca bază dreptunghiul $ABCD$, iar muchiile laterale sunt congruente. Demonstrați că planul (VCD) formează unghiuri congruente cu planele (VAC) și respectiv (BAC) dacă și numai dacă unghiurile $\sphericalangle VAC$ și $\sphericalangle BAC$ sunt congruente.

Soluție. Fie S proiecția punctului D pe dreapta AC . Din $DS \perp VO$ și $DS \perp AC$ rezultă $DS \perp (VAC)$, prin urmare proiecția pe planul (VAC) a triunghiului VDC este triunghiul VSC .

..... **2p**

Fie u și v măsurile unghiurilor formate de planul (VCD) cu planele (VAC) și respectiv (BAC) . Avem echivalențele

$$u = v \Leftrightarrow \cos u = \cos v \Leftrightarrow \frac{\text{aria}[VSC]}{\text{aria}[VDC]} = \frac{\text{aria}[COD]}{\text{aria}[VDC]}$$

$$\Leftrightarrow \text{aria}[VSC] = \text{aria}[COD] \Leftrightarrow VO \cdot CS = \frac{1}{2} AB \cdot BC.$$

..... **2p**
 Din teorema catetei avem $DC^2 = CS \cdot CA$. Cum $DC = AB$, rezultă $CS = \frac{AB^2}{AC}$.

..... **1p**
 În consecință, $u = v \Leftrightarrow VO \cdot AB = \frac{1}{2} AC \cdot BC \Leftrightarrow \frac{VO}{OA} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow \sphericalangle VAC = \sphericalangle BAC$, ceea ce trebuia demonstrat.

..... **2p**

Problema 3. Fie numerele reale strict pozitive a, b, c . Determinați cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că

$$\frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{n}{a + b + c},$$

pentru orice $x \in [0, 1]$.

Soluție. Pentru $x = 1$ obținem $\frac{3}{a+b+c} \geq \frac{n}{a+b+c}$, de unde $n \leq 3$.

..... **2p**
 Vom arăta că numărul cerut este $n = 3$. Este suficient să arătăm că $E(x) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{1}{ax + b + c} + \frac{1}{a + bx + c} + \frac{1}{a + b + cx} \geq \frac{3}{a + b + c}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

..... **1p**
 Folosind inegalitatea dintre media armonică și media aritmetică a numerelor $ax + b + c$, $a + bx + c$ și $a + b + cx$, rezultă că $E(x) \geq \frac{9}{(a+b+c)(x+2)}$.

..... **3p**
 Cum $x \in [0, 1]$, rezultă $x + 2 \leq 3$, de unde se obține că $E(x) \geq \frac{3}{a+b+c}$, pentru orice $x \in [0, 1]$.

..... **1p**

Problema 4. Se consideră un tetraedru $ABCD$ în care $AD \perp BC$ și $AB \perp CD$. Notăm cu E și F proiecțiile punctului B pe dreptele AD și AC , respectiv. Fie M mijlocul segmentului AB și fie N mijlocul segmentului CD . Arătați că $MN \perp EF$.

Soluție. Deoarece AD este perpendiculară pe BC și pe BE , rezultă $AD \perp (BEC)$, de unde $AD \perp CE$. Analog obținem $DF \perp AC$.

..... **2p**
 Fie $\{H\} = CE \cap DF$. Deoarece BH este intersecția planelor (BEC) și (BFC) , deducem că $BH \perp (ACD)$.

..... **2p**
Rezultă că proiecția Q a punctului M pe planul (ACD) este mijlocul
segmentului $[AH]$.

..... **1p**
Cercul ciecumscrie triunghiurilor AEF și BEF au centrele N și Q .
Cum linia centrelor este perpendiculară pe coarda comună, avem $NQ \perp EF$.

..... **1p**
Deoarece $MQ \perp EF$, rezultă $EF \perp (MQN)$, deci $MN \perp EF$.

..... **1p**